

SUITES RÉELLES

EXERCICE 1. Démontrer que dans l'ensemble \mathbb{R} , on a $|x| \leq x \Leftrightarrow -x \leq x \leq x$. En déduire que dans \mathbb{R} , on a toujours

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

EXERCICE 2. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha > 0$, un réel. On définit l'intervalle $I_{a,\alpha}$ par $I_{a,\alpha} =]a-\alpha, a+\alpha[$ si $a \in \mathbb{R}$, $I_{a,\alpha} =]-\infty, -\alpha[$ si $a = -\infty$ et $I_{a,\alpha} =]\alpha, +\infty[$ si $a = +\infty$. Montrer que

$$x \in I_{a,\alpha} \Leftrightarrow |x-a| < \alpha \text{ si } a \in \mathbb{R}$$

$$x \in I_{-\infty,\alpha} \Leftrightarrow x < -\alpha$$

$$x \in I_{+\infty,\alpha} \Leftrightarrow x > \alpha$$

EXERCICE 3. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} ayant un majorant M . Démontrer que

$$M = \sup A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x$$

EXERCICE 4. Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n / n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

a. Montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.

b. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

EXERCICE 5. Soient a et b des réels et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n)$$

La première formule est appelée formule du binôme.

EXERCICE 6. Démontrer à l'aide de la définition que

1 est une limite de $u_n = 1 - \frac{1}{n}$

$+\infty$ est une limite de $u_n = \frac{n}{5n^2}$

$+\infty$ est une limite de $u_n = n^n$, $n > 1$

-1 n'est pas une limite de $u_n = (-1)^n$

$+\infty$ n'est pas une limite de $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

EXERCICE 7. Démontrer que la suite définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

EXERCICE 8. Démontrer que la suite

$$u_n = \frac{1}{1+2^0} + \dots + \frac{1}{1+2^n}$$

est de Cauchy.

EXERCICE 9. On considère la suite $u_n = 1 + \dots + \frac{1}{n}$.

a. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite u n'est pas convergente.

EXERCICE 10. Soit la suite définie par

$$u_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

a. Montrer que $2u_{2n} \leq u_n + 1/\sqrt{n}$.

b. Montrer que u est convergente.

c. Déterminer la limite de la suite u .

EXERCICE 11. Soit u une suite réelle.

a. Soit $l \in \mathbb{R}$. Montrer que si les suites extraites $u_{2n} \rightarrow l$ et $u_{2n+1} \rightarrow l$ alors la suite $u \rightarrow l$.

b. On prend $u_n = 1/n^2 + (-1)^n/n$.

i. Donner $\lim u_{2n}$ et $\lim u_{2n+1}$.

ii. Montrer que u est convergente et donner sa limite.

c. On considère la suite $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

i. Montrer que les suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} sont adjacentes.

ii. Montrer que u est convergente.

EXERCICE 12. On considère les fonctions $f(x) = 4x + 5/x + 3$ et $g(x) = (1-x)^2$.

a. Montrer que f est croissante sur $I = [0, 4]$ et g est décroissante sur $J = [0, 1]$. En déduire que $f(I) \subset I$ et que $g(J) \subset J$.

b. On définit la suite u par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

c. On définit la suite z par $z_0 = \frac{1}{2}$ et $z_{n+1} = g(z_n)$.

i. On considère la suite extraite v définie par $v_n = z_{2n}$. Montrer qu'il existe une fonction F croissante sur J telle que $F(J) \subset J$ et $v_n = F(v_{n+1})$. Montrer que v est convergente et calculer sa limite.

ii. On considère la suite extraite w définie par $w_n = z_{2n+1}$. Montrer que $w_{n+1} = F(w_n)$. Montrer que w est convergente et calculer sa limite.

iii. Montrer que la suite u est divergente.



ETU SUP.com

Programme
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..